Zusammenfassung - Mathematik

09 October 2014 08:29

Version: 1.0.0
Studium: 1. Semester, Bachelor in Wirtschaftsinformatik
Schule: Hochschule Luzern - Wirtschaft
Author: Janik von Rotz (http://janikvonrotz.ch)

Erlös, Kosten, Gewinn

16 October 2014 08:22

Kosten

$$K = ax + b$$

$$a = \frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K_2 - K_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = K - ax$$

Gewinn

Gewinn = Erlös - Kosten

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

Erlös

Erlös = Preis · Meng

$$E(x) = p(x) \cdot x \quad \text{oder} \quad p \cdot x$$

Deckungsbeitrag - Ab diesem Betrag erfolgt der Gewinn -> Erlöst ./. Variablekosten = Kostenschwelle zum Gewinn

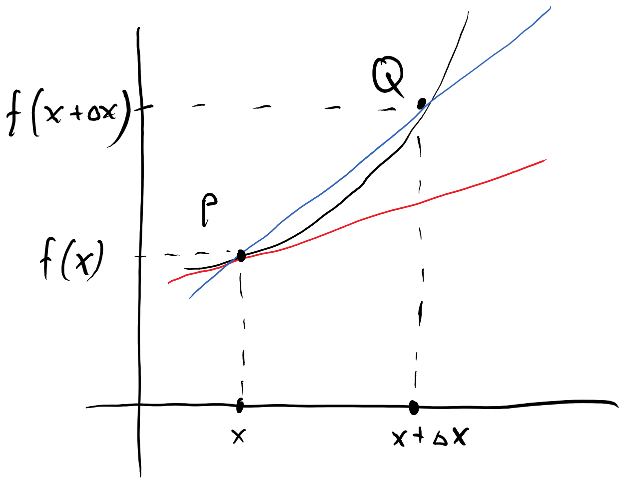
$$G_D(x) = E(x) - K_v(x)$$

Ableitung

16 October 2014 08:52

geometrisch: Der Wert der Ableitung(sfunktion) an einer bestimmten Stelle ist die *Steigung der Tangente* an den Graphen der ursprünglichen Funktion an dieser Stelle. Beispiel Weg vs. Zeit: - Steigung der Sekante: Durchschnittsgeschwindigkeit - Steigung der Tangente (Grenzwert!): Momentangeschwindigkeit

analytisch: Die Ableitung y=f'(x) ist auch wieder eine Funktion (jedoch im Allgemeinen eine andere Funktion als die ursprüngliche Funktion y=f(x)). Der Wert der Ableitungsfunktion f'(x) an einer bestimmten Stelle beschreibt die *Änderungsrate* der Funktion y=f(x) an dieser Stelle x.

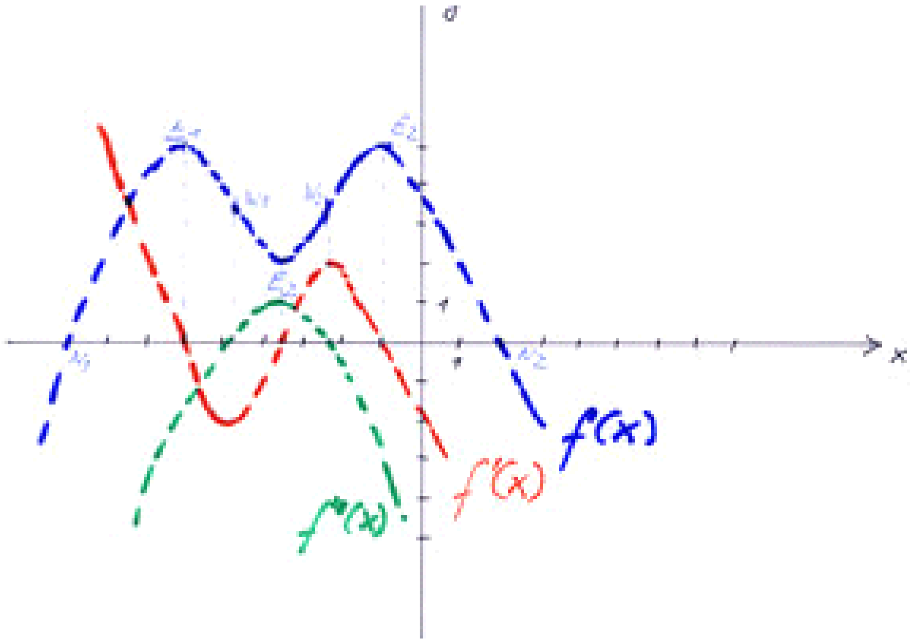


$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ableitung zeichnen

11 December 2014 09:05

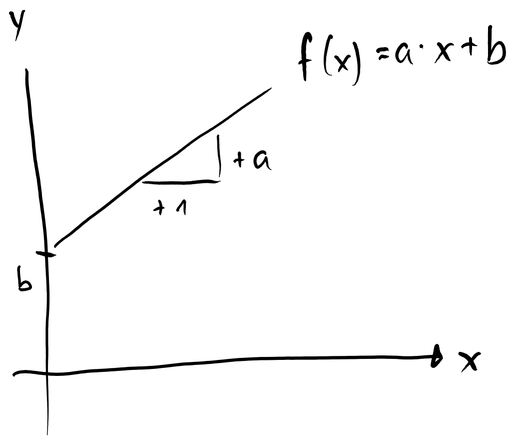


1. Die Ausgangsfunktion f(x) hat drei Extrema (E1 Maximum, E2 Minimum und E3 Maximum) sowie zwei dazwischenliegende Wendepunkte W1 und W2. Die beiden Nullstellen N1 und N2 sind für die Ableitungsskizze nicht wesentlich.
2. Die erste Ableitung f'(x) hat an den Extrema Nullstellen, die Sie sofort einzeichnen können.
3. Im linken Teil von f(x) vor E1 steigt die Funktion, dort muss f'(x) positiv sein, also oberhalb der x-Achse liegen.
4. Im rechten Teil von f(x) nach E2 fällt die Funktion, dort muss f'(x) negativ sein, also unterhalb der x-Achse liegen. Beide Teile können Sie ausgehend von den Nullstellen skizzieren.
5. Am Wendepunkt W1 liegt ein Minimum vor (Funktion fällt), am Wendepunkt W2 ein Maximum (Funktion steigt dort). Beide Extrema fügen Sie in f'(x) ein. Die Lage wurde hier - da ohne weitere Berechnung - willkürlich gewählt.
6. Nun verbinden Sie die drei Nullstellen der Ableitung mit Minimum und Maximum und Sie haben einen (ungefähren) Verlauf der Ableitung skizziert.
7. Ausgehend von f'(x) skizzieren Sie nun die zweite Ableitung f''(x) . Die Eigenschaften der Funktion f(x) können der Kontrolle dienen. An den beiden Extrema von f'(x) hat f''(x) Nullstellen, die Sie sofort einzeichnen können. Kontrolle sind die Wendepunkte W1 und W2 der Ausgangsfunktion, deren zweite Ableitung hier null ist.
8. Der Funktionsverlauf von f'(x) zeigt, dass die Funktion (mit wachsendem x) zunächst fällt (f''(x) negativ), dann steigt (f''(x) positiv mit Maximum am Wendepunkt) und schließlich wieder fällt (f''8x) wieder negativ). Als Graph ergibt sich eine Parabel, die nach unten geöffnet ist.
9. Als Gesamtbild erhalten Sie die Funktion f(x) mit dem skizzierten Verlauf ihrer Ableitungen f'(x) und f''(x).

Ableitungen Faktorregeln

23 October 2014 08:49

Erste Regel



$$f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$$

$$f(x) = ax + b \rightarrow f'(x) = a$$

Potenzregel

$$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n x^{n-1} \cdot 1$$

Beispel:

$$f(x) = x^5 \longrightarrow f'(x) = 5x^4$$

$$f(x) = (3x)^2 \longrightarrow f'(x) = 2 \cdot \underbrace{3x}_{u(x)} \cdot \overbrace{3}^{u'(x)}$$

mit negativen oder gebrochenen Exponenten

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \longrightarrow f'(x) = (-1) \cdot x^{(-1)-1} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Faktorregel

$$f(x) = c \cdot g(x) \longrightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$$

Ableitungen Summenregeln

23 October 2014 09:05

$f(x) = v(x) + w(x) \rightarrow f'(x) = v'(x) + w'(x)$

Spezialfall

$f(x) = v(x) + c \rightarrow f'(x) = v'(x)$

Beispiel

$f(x) = 5x^3 + 6x^2 - 3x + 2 \rightarrow f'(x) = 5 \cdot 3x^2 + 6 \cdot 2x^2 - 3 \cdot 1 + 0$

Scheitelpunkt und Lösung einer quadratischen Gleichung

30 October 2014 08:46

Tiefster Punkt einer Parabel ist der Scheitelpunkt.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$S\left(-\frac{b}{2a} \;\middle|\; c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

oder

$$f'(x) = 2a \cdot x + b = 0$$

$$f(x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

Lösungen einer quadratischen Funktion.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ableitung von zusammengestzten Funktionen

30 October 2014 08:57

Produktregel

$$f(x) = v(x) \cdot w(x) \rightarrow f'(x) = v'(x) \cdot w(x) + v(x) \cdot w'(x)$$

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{v(x)}{w(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{v'(x) \cdot w(x) - v(x) \cdot w'(x)}{w(x)^2}$$

Kettenregel

$$f(x) = \sqrt{\underbrace{x^2+1}}$$

$$u = x^2 + 1 \rightarrow f(u(x))$$

$$f(u) = \sqrt{u} \qquad f'(u) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u}}$$

$$u(x) = x^2 + 1 \longrightarrow u'(x) = 2x + 0$$

$$f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Alternative Schreibweise

$$f(u(x)) \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Taschenrechner

12 November 2014 20:50

Polynome lösen

```
2nd + ploly-solv (cos/cos-1) + 1 oder 2 + <Enter values> + Solve
```

Optional:

```
Store x1 als x Variable und x2 als y Variable, x3 als z Variable
```

Resultat bekannt - x-Werte für bestimme Funktion berechnen

Variante 1:

```
table + 2 + <Enter function>
table + <Lookup value>
```

Variante 2:

```
<Funktion umformen> + 2nd + ploly-solv (cos/cos-1)
```

Variante 3:

```
2nd + num-solv (sind/sin-1) + <Enter equation>
```

Funktion anhand x und y Werten erstellen lassen

```
data + <Enter values>
2nd + data + 4 (linReg)
```

Ableiten von Funktionswerten

```
table + 2 <Edit function> + 2nd + d/dx (ln log) + <Enter function> und
<Enter x definition (normally x)>
```

Ableitung kontrollieren

```
table + 2 <Edit function> + <Enter Ableitung> + (-) + 2nd + d/dx (ln log)
+ <Enter function> und <Enter x definition (normally x)>

Das Resultat sollte dann nahe zu 0 sein.
```

Umkehrfunktion

13 November 2014 09:01

$x \rightarrow p = -1.25x + 9$

$p \rightarrow x = -0.8p + 7.2$

p -> x ist die Umkehrfunktion von x -> p

Exponentialfunktion

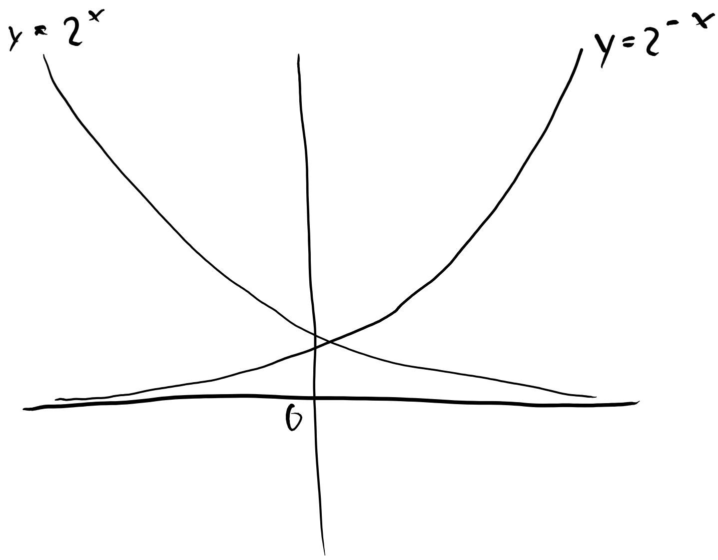
13 November 2014 09:52

Wachstum

$f: x \rightarrow y = k \cdot a^x \qquad a \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1,\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f: x \rightarrow y = 2^x \qquad D_f = \mathbb{R}$

$f: x \rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x} \quad D_f = \mathbb{R}$



Funktion hat keine Nullstellen
x-Achse ist die Asymptote
Graph steigt wenn a > 1
Graph fällt wenn 0 < a <1

Logarithmusfunktion

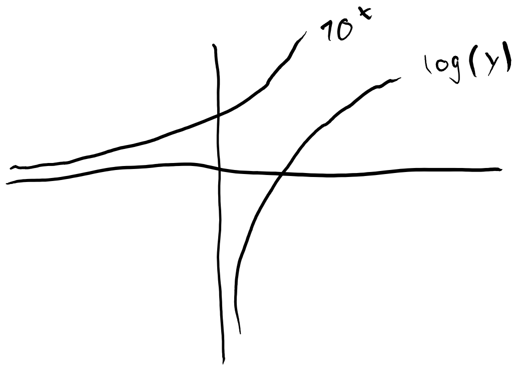
13 November 2014 09:59

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion heisst Logarithmusfunktion

Basis $a = 3 \quad y = 3^x \rightarrow x = \log_3(y)$

$a = 10 \quad y = 10^x \rightarrow x = \log(y)$

$a = e = 2.718\ldots \quad y = e^x \rightarrow x = \ln(y)$ natürlicher Logarithmus



Spiegelung der Exponentialkurve

Zur Auflösung eines Logarithmues muss der Gegenwert der Gleichung als Exponent zur Basis des Logarithmus genommen werden.

$-0.2 + 3 = \log(x+1) \rightarrow 10^{-0.2+3} = x+1$

Ableitungen Exponentialregeln

13 November 2014 10:14

Basis E

$$(e^x)' = 1 \cdot e^x \quad , x \in R$$

Beliebige Basis

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x \cdot 1 \qquad e^{\sqrt{x}} \rightarrow 0.5x^{-0.5} \rightarrow e^{\sqrt{x}} \cdot 0.5x^{-0.5}$$

$$f(x) = a^x \longrightarrow f'(x) = \ln(a) \cdot a^x \cdot 1$$

Beispiel

$$e^{2x} \rightarrow 2e^x$$

Ableitungsregeln Logarithmusfunktion

20 November 2014 08:50

$$f(x) = \ln(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot 1$$

$$f(x) = \log_a(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)} \cdot 1$$

$$f(x) = \log(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(10)} \cdot 1$$

Funktionsänderung

27 November 2014 08:17

Änderumg des Funktionswertes

$$df = f'(x) \cdot dx \approx \Delta f$$

$$\Delta f = f(x + dx) - f(x)$$

Ableitung als Grenzfunktion

27 November 2014 08:41

Grenzkosten — Mehrkosten pro zusätzliche Einheit

$$K'(x) = K_v'(x) + 0$$

Stückkosten oder Durschnittskosten

$$k(x) = \frac{K(x)}{x}$$ k = Stückkosten

Grenz-Stückkosten oder Grenz-Durchschnittskosten

$k'(x)$ — Anstieg Stückkost pro zusätzliche Einheit

$$k'(x) = \frac{dk}{dx}$$

Grenzerlös

$E'(x)$: $E(x) = x \cdot p(x)$ → nach x ableiten x = Mengeneinheit

$E'(p)$: $E(p) = x(p) \cdot p$ → nach p ableiten p = Geldeinheit / Mengeneinheit

Grenzoutput

r = Arbeit und Kapital ≈ Input

$$x'(r)$$

Durchschnittsoutput

$$\bar{x}(r) = \frac{x(r)}{r}$$

Grenz-Durchschnittsoutput

$$(\bar{x}(r))'$$

Grenzgewinn

$$G'(x) = E'(x) - K'(x)$$

↳ Mehrgewinn pro zusätzliche Einheit

Marginale Konsum- und Sparquote

$$Y = \underbrace{C(Y)}_{\text{Consume}} + \underbrace{S(Y)}_{\text{Save}}$$

$$1 = C'(Y) + S'(Y)$$

Horizontale = Sättigungsgrenze

Monotonie

27 November 2014 09:47

Monotonie

$x_2 > x_1$

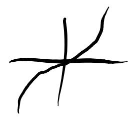
Streng monoton steigend

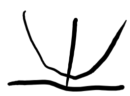
$f(x_2) > f(x_1)$

Streng monton fallend

$f(x_2) < f(x_1)$

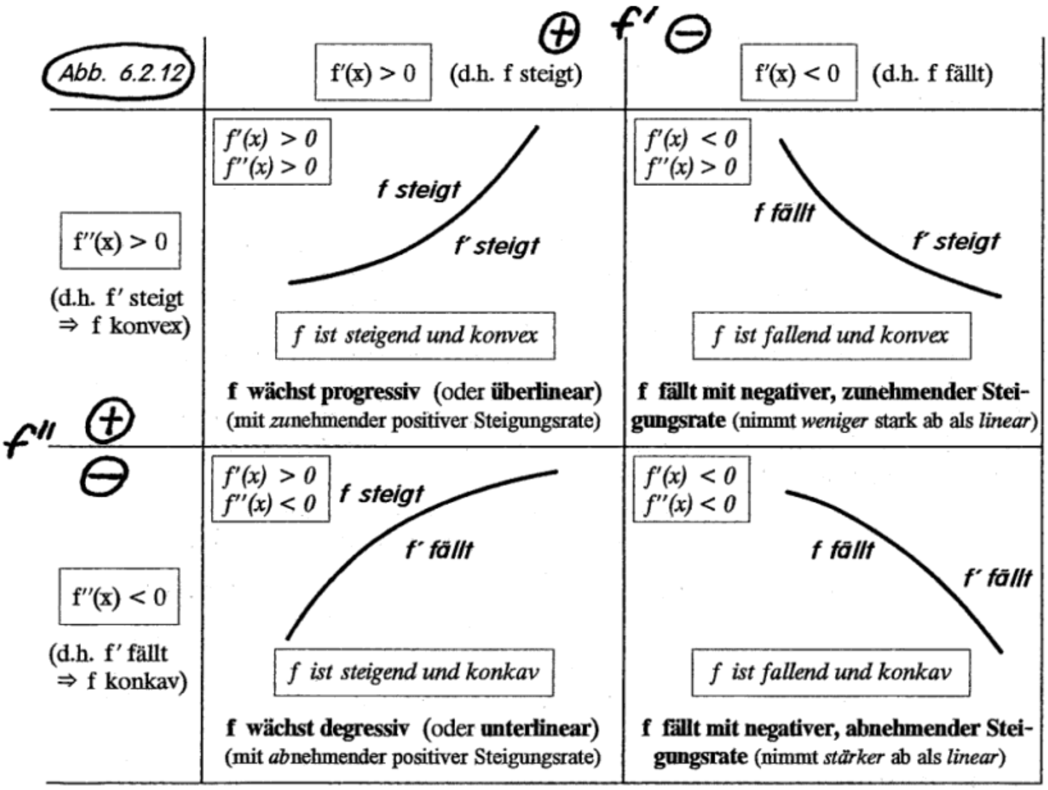
Beispiele

$f(x) = x^3 \rightarrow$  steigend

$f(x) = x^2 \rightarrow$  $x > 0$ steigend
$x < 0$ fallend

Streng monotone Funktionen sind umkehrbar

An einer Tangente lässt sich durch Berechnung der Ableitung mit Werten > Tangente und < Tangente, die Monotonie einer Kurve bestimmen.

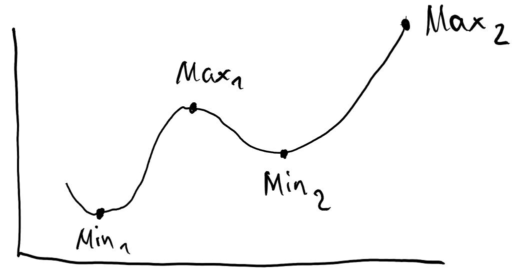


Für f' wird eine Wertebereich eingesetzt, wird die Ableitung null gesetzt so erhält man den Wendepunkt.
Für f'' untersucht man die 0 Werte und setzt diese entsprechend ein.

Extremwerte

04 December 2014 09:39

Absolutes Minimum = Min_1,
Relatives Minimum = Min_2
Relatives Maximum = Max_1
Absolutes Maximum (Randextremum) = Max_2



Stationäre Stellen

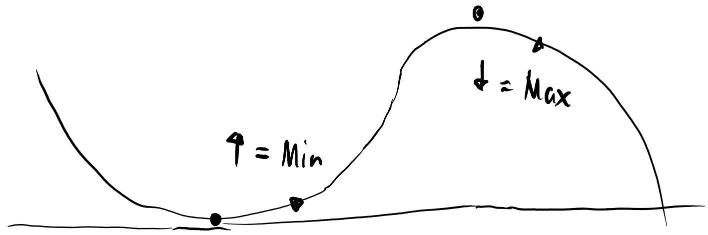
$$f'(x) = 0 \rightarrow x$$

relatives Minimum

$$f''(x_{min}) > 0$$

relatives Maximum

$$f''(x_{Max}) < 0$$



Wendepunkte

04 December 2014 17:06

f hat einen Wendepunkt wenn:

$$f''(x_w) = 0 \quad \& \quad f'''(x_w) \neq 0$$

Sattelpunkt

$$f'(x_s) = 0 \quad \& \quad f''(x_s) = 0 \quad \& \quad f'''(x_s) \neq 0$$

konkav-konvexer Wendepunkt

$$f''(x_w) = 0 \quad \& \quad f'''(x_w) > 0$$

konvex-konkaver Wendepunkt

$$f''(x_w) = 0 \quad \& \quad f'''(x_w) < 0$$

Im Vergleich zu Extremwerte gilt es hier die Lösung von der 2en Ableitung in die 3e einzusetzen.

Gleichungssysteme

11 December 2014 08:50

Lösen mit sys-solv